Informes generales de la asignatura, mayo de 2015

MATEMÁTICAS NM TZ2

Variantes de los exámenes según la zona horaria

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes de los exámenes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo siempre al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se sigue un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de exámenes de mayo de 2015 el IB elaboró variantes de los exámenes de Matemáticas NM para distintas zonas horarias.

Límites de calificación de la asignatura

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 16	17 - 34	35 - 46	47 - 57	58 - 69	70 - 80	81 - 100

Evaluación interna

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14	15 - 17	18 - 20

Ámbito y adecuación del trabajo entregado

En comparación con la última convocatoria de exámenes, el abanico de temas elegidos ha sido mayor, aunque también ha habido un número mayor de exploraciones parecidas; por ejemplo, parece que ha aumentado el número de tareas de elaboración de modelos de situaciones de la vida real. Se abordaron algunos temas muy interesantes. En algunos de esos casos se notaba claramente que era un trabajo original de los alumnos y que el tema había surgido a partir de situaciones de su propia vida. Sin embargo, una vez más sigue habiendo muchos alumnos que acometieron exploraciones sobre temas habituales como la sucesión de Fibonacci, la razón áurea, el problema de Monty Hall y el modelo SIR para modelizar epidemias, juegos de casino, criptografía, representación gráfica de tonos musicales y movimiento de proyectiles. Muchos de estos trabajos destacaron por tener un enfoque demasiado basado en fórmulas y, con frecuencia, por ser bastante deficientes; quizá se deba a que esos temas solo les atraen a los alumnos más flojos. La desventaja de algunas de estas exploraciones, especialmente en el caso de los temas de elaboración de modelos, es que los medios tecnológicos se encargan de hacer gran parte de la "exploración" y que los alumnos no fueron capaces siempre de demostrar que habían entendido realmente lo que estaban haciendo. Además, hubo muy pocos casos en los que los alumnos fueran capaces de encontrar temas excelentes sobre los que explayarse. También recibimos algunas exploraciones de carácter histórico, realizadas probablemente por alumnos cuyos puntos fuertes se enmarcan en otras áreas distintas de las matemáticas. En muchos de esos casos el alumnos se limitó a plasmar información copiada directamente de fuentes externas, sin demostrar apenas que hubiera entendido realmente los conceptos matemáticos incluidos. En ocasiones todos los alumnos de algunos colegios parecían elaborar exploraciones de un cierto tipo, quizá porque el profesor les había aconsejado que determinadas exploraciones se prestan mejor que otras a lograr buenas puntuaciones en determinados criterios. A pesar de que esto no va en contra de ninguna de las directrices del IB, se pretende que al elaborar la exploración los alumnos saquen provecho de las actividades matemáticas realizadas y que les resulten motivadoras y gratificantes. Por otro lado, los colegios no deberían esperar de sus alumnos ni exigirles que aborden aspectos matemáticos nuevos o que se escapen del ámbito del currículo del Nivel Medio, puesto que a aquellos que eligieron un tema que estaba por encima del nivel de la asignatura con frecuencia les costó muchísimo demostrar que comprendían bien los aspectos matemáticos incluidos en la exploración. Para finalizar, sigue habiendo algunas muestras que están basadas en antiguas tareas de la carpeta, lo que impide que los alumnos logren la máxima puntuación en determinados criterios.

Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

Criterio A

Hubo muchos alumnos que fueron capaces de presentar un trabajo organizado que contara con una introducción razonable, incluir algún tipo de fundamentos, establecer un objetivo general, tratar de explicar los pasos que se habían dado y finalizar con una conclusión. Dotar al trabajo de cierta coherencia ya les habilitaba para lograr el nivel 2 en este criterio. La coherencia del trabajo sería aún mayor si el alumno incluyera más explicaciones, en vez de menos, para aclarar los vínculos que existen entre un apartado y el siguiente, y si mostrase todos los pasos de los que consta el desarrollo. Los alumnos siempre tendrían que tener presente que el público al que ha de ir dirigida su exploración son sus compañeros. En este sentido, hubo pocos alumnos que consiguieran alcanzar el nivel 4, puesto que con frecuencia su trabajo estaba lastrado por explicaciones incompletas o la exploración no satisfacía en su totalidad el objetivo general propuesto. Tanto el descriptor "conciso" como el descriptor "completo" resultan difíciles de alcanzar. Por ejemplo, páginas y páginas llenas de cálculos, datos o gráficos repetitivos afectan negativamente a la concisión y la fluidez del trabajo. Por lo general, será difícil que una exploración que sobrepasa las 18 páginas sea catalogada de "concisa".

A pesar de que cada vez hay más alumnos que incluyen referencias, sigue habiendo demasiados que se limitan a incluir una bibliografía en el trabajo que no cita la fuente de las ideas y, en particular, de las imágenes incluidas en el texto en el lugar preciso en el que aparecen. Esto es algo de lo que los profesores tendrían que percatarse en la versión inicial del trabajo y deberían hacer que los alumnos lo corrigieran antes de entregar la versión final del mismo.

Criterio B

La mayoría de los alumnos fueron capaces de elegir las presentaciones matemáticas apropiadas y emplearon en la mayor parte de los casos la notación y los símbolos adecuados a su trabajo, lo que les condujo al nivel 2. Casi todas las tablas contaban con los encabezamientos apropiados y la mayoría de las curvas estaban rotuladas. Aún así, incluir innumerables tablas con datos mal rotulados no resulta especialmente útil y no sirve para comunicar con eficacia lo que el alumno quiere transmitir. Además de esto, la notación sigue siendo un tema problemático. Con frecuencia se utilizó el signo igual allí donde el signo de aproximación hubiera resultado más adecuado. El uso de notación de calculadora —por ejemplo, de los símbolos * y ^— sigue siendo un problema, aunque en menor medida que en convocatorias anteriores. Hubo casos de falta de coherencia al utilizarse distintas variables para las mismas situaciones. En ocasiones las variables pasaban de ir en mayúscula a ir en minúscula (o a la inversa), o incluso hubo casos en los que el alumno cambió de símbolo en medio de un cálculo o de una explicación. También quedó patente que faltaba una definición clara de todas las variables utilizadas. Se debería hacer hincapié a los alumnos de que, allí donde sea posible, deberían tratar de incluir formas de representación distintas. La exposición a los medios tecnológicos y el uso de los mismos en las exploraciones de los alumnos varía considerablemente de un colegio a otro.

Criterio C

A pesar de que la comprensión de este criterio parece que ha mejorado un poco respecto al año pasado y de que los profesores parecen ser más conscientes de que el compromiso personal requiere más que un simple comentario sobre lo mucho que han disfrutado del tema, sigue habiendo demasiados profesores que conceden un nivel 3 o 4 sin que el trabajo contenga muchas pruebas de que efectivamente hubo compromiso personal. El mayor problema aquí es que ambos, alumnos y profesores, parecen creer que el interés personal puede equipararse con el compromiso personal. Para los alumnos, hacer suya la exploración o pensar de manera independiente les sigue pareciendo una de las partes más difíciles de esta evaluación interna. A los profesores se les aconseja que animen a los alumnos a decir explícitamente qué partes de la exploración son ideas originales suyas, para que así el compromiso personal quede más patente.

Criterio D

La mayoría de los alumnos se esforzaron por reflexionar, a pesar de que estas reflexiones a menudo consistían solo en repetir los resultados o en describirlos en el contexto de la situación. A pesar de que algunas de estas reflexiones tenían sentido en el contexto de la tarea emprendida, sería preferible que los alumnos se centraran en los métodos puestos en práctica, en los procedimientos matemáticos aplicados o en las implicaciones de los modelos utilizados, puesto que en casi ningún caso se incluyeron consideraciones verdaderamente críticas sobre las implicaciones o las limitaciones de su trabajo. Tanto los alumnos como los profesores tienen que tener presente que es necesario que el alumno reflexione sobre los aspectos matemáticos del trabajo y sobre lo que ha aprendido al respecto, y que no se limite a reflexionar sobre los fenómenos del mundo real que les parecieron suficientemente interesantes como para estudiarlos. Las exploraciones más flojas por lo general contenían muy poca reflexión en el cuerpo del trabajo, dejando la inmensa mayoría de la reflexiones para el apartado de conclusiones.

Criterio E

La calidad de las matemáticas y el grado de comprensión demostrado varió ampliamente de un trabajo a otro. La mayoría de las exploraciones incluyeron matemáticas del nivel apropiado, pero fue muy poco frecuente que los alumnos lograran la máxima puntuación, debido mayormente a que no consiguieron demostrar una comprensión real del tema tratado. Por ejemplo, hubo algunos alumnos que utilizaron matemáticas complicadas tomadas de otras fuentes que, según quedó patente, no habían entendido bien y no explicaron, utilizaron o aplicaron correctamente. En trabajos así, los alumnos se limitaron básicamente a sustituir valores en las fórmulas que se les daban y dejaban poco margen para mostrar conocimientos y comprensión matemáticos. Sigue habiendo alumnos que utilizan únicamente medios tecnológicos para hallar ecuaciones de regresión —sin demostrar que saben cómo se obtienen o sin intentar ningún tipo de enfoque analítico—, y este es un tema que hay que abordar. En casos así, a menudo fueron los medios tecnológicos los que hicieron el trabajo, mientras que los alumnos se limitaron a comentar los resultados de manera superficial. Trabajos así fueron habitualmente exploraciones basadas en la elaboración de modelos o en la estadística, que incluían regresiones lineales o pruebas de chi-cuadrado en las que se generaban los resultados mediante medios tecnológicos, sin que el alumno tuviera que realizar ningún cálculo. Hubo muy pocos que fueran más allá y trataran al menos de explicar el "cómo" o el "por qué" que se esconden detrás de los resultados. Hay demasiados alumnos que se limitan ellos mismos a un nivel 2 como nota máxima, ya que solo emplean aspectos matemáticos incluidos en la sección de conocimientos previos del programa de estudios, por mucho que en otros criterios quizá puedan obtener una nota bastante buena. Los profesores podrían hacer aquí algo más al respecto, explicando a los alumnos qué hace falta para demostrar comprensión. Por lo general, la cantidad de matemáticas utilizadas no es el factor más importante a la hora de determinar el nivel de logro alcanzado, sino el grado de comprensión que haya demostrado el alumno.

A pesar de los comentarios anteriores, lo cierto es que hubo algunos alumnos y algunos colegios que enviaron trabajos excelentes donde quedó patente una muy buena comprensión. Estos alumnos abordaron áreas de matemáticas que no se habían cubierto o enseñado en clase, y para ello tuvieron que aprender por su cuenta los contenidos y las técnicas pertinentes.

Recomendaciones para la enseñanza a futuros alumnos

- La comprensión de los criterios de evaluación por parte de los profesores tendía a estar correlacionada con el desempeño de sus alumnos y, por consiguiente, ellos mismos han de familiarizarse con las expectativas que encierra cada criterio. Esto sugiere que las oportunidades de formación y la exposición a un amplio abanico de exploraciones ayudan significativamente a los profesores a comprender y comunicar de manera más precisa lo que se espera de sus alumnos. Esto se puede lograr mediante cursos de formación para profesores del IB o leyendo los informes generales de la asignatura y la documentación de apoyo que está disponible en el Centro pedagógico en línea (CPEL). Con demasiada frecuencia parecía que la puntuación emanaba de algún tipo de interpretación personal y subjetiva de lo que representa el criterio, en vez de ser el resultado de una interpretación verdadera del mismo.
- La orientación de los profesores es fundamental a la hora de ayudar a los alumnos a elegir un tema bien centrado que incluya aspectos matemáticos pertinentes y que les ofrezca suficientes oportunidades de lograr la puntuación máxima en todos los criterios. Se recomienda que los alumnos elijan un tema que les interese y que sean verdaderamente capaces de acometer, en lugar de decantarse por un tema que no entiendan realmente. A los alumnos también habría que orientarles sobre cómo se ha de elegir una tarea de exploración que tenga relevancia para ellos a nivel personal, que permita acometer una exploración de verdad y que les dé la oportunidad de emplear elementos matemáticos que sean acordes con el nivel de la asignatura. Los alumnos deberían evitar elegir problemas extraídos de libros de texto estándar y temas populares que sean de dominio público y fáciles de obtener. La lista de los temas más manidos se puede saber sin más que leer los informes generales de la asignatura de este año y del año anterior. Estos temas, por lo general, no dan mucho juego a la hora de demostrar un verdadero compromiso e implicación personal y de realizar reflexiones críticas.
- A los alumnos hay que formarlos para que entiendan mejor este criterio. Esto implica también que los profesores han de transmitir esto a sus alumnos mediante ejemplos. Los profesores deberían tener presente que en el CPEL disponen de un conjunto considerable de nuevos ejemplos corregidos y puntuados y que a los alumnos se les puede brindar acceso a algunos de ellos para que puedan hacerse una idea del tipo de trabajos que reciben buenas notas. Esto pone de relieve la importancia de dedicar un tiempo razonable a explicar en qué consiste la exploración.
- Los profesores tienen que hacer más hincapié en lo importante que es proporcionar referencias claras y detalladas; además, a los alumnos se les debería enseñar cómo introducir referencias intertextuales apropiadas en su trabajo. Una bibliografía por sí sola no le ayuda al lector a saber cuándo y cómo se ha ido utilizando cada recurso en el trabajo. En general, a los alumnos se les debería enseñar los elementos básicos de una buena redacción, incluida sobre todo la manera correcta de citar fuentes externas.
- También hay que recalcar la necesidad de utilizar la notación correcta. Asimismo, se

debería enseñar y demostrar a los alumnos cosas sencillas como la manera de rotular apropiadamente un gráfico o el modo de presentar los cálculos y razonamientos algebraicos. A muchos alumnos les vendría bien recibir una formación específica sobre el uso de algún tipo de software gratuito que sirva para generar expresiones matemáticas.

- El interés personal, por sí solo, no equivale a "compromiso e implicación personal". A los alumnos hay que enseñarles lo que significa "explorar", y cómo situaciones de distinta naturaleza se pueden abordar de esta manera. Los ejemplos hechos en clase casi siempre se pueden replantear partiendo de un "qué pasaría si...". Esto les ayudaría a los alumnos a darse cuenta de que también ellos pueden plantearse la misma pregunta cuando estén explorando los temas que han elegido.
- La reflexión sobre los resultados debería incluir una valoración sobre lo apropiados que son para la situación o el contexto del problema y debería mencionar las implicaciones (p. ej., si la función de un modelo matemático crece hasta el infinito se tendrá que plantear si resulta razonable) y las limitaciones (una probabilidad es casi 0 pero, ¿puede verdaderamente llegar a ser 0?) de dichos resultados.
- Se debería repasar en clase la secuencia de temas estudiados para permitirles a los alumnos la mayor flexibilidad posible a la hora de elegir tema, dado que tienen que preparar la exploración a mitad de la asignatura. Hay temas como la estadística (incluida la regresión) y la probabilidad que podrían abordarse antes, así como las transformaciones de funciones. Las funciones trigonométricas y las relaciones entre los distintos elementos de un triángulo es otro buen tema. Por lo general, los vectores y el análisis no son temas que resulten asequibles para la exploración, especialmente si solo se han visto en clase de manera muy somera (a un nivel básico) cuando llega el momento de asignar las exploraciones.

Comentarios adicionales

- Los medios tecnológicos han de verse como una herramienta para realizar la exploración; no han de ser el motor que marque el rumbo de la exploración. Por ejemplo, en las tareas de elaboración de modelos se debería animar a los alumnos a que muestren al menos por qué han elegido un determinado modelo de regresión y a que ofrezcan una explicación, tan detallada como les sea posible, del desarrollo algebraico del modelo elegido.
- Con frecuencia las matemáticas utilizadas no eran de la asignatura de NM. Se debería hacer hincapié en que los alumnos apliquen los conceptos matemáticos que han descubierto o utilizado. A menudo, los profesores concedieron una puntuación elevada a trabajos que se habían copiado de Internet, sin que el alumno demostrara una comprensión real de lo que había escrito. Utilizar conceptos matemáticos provenientes del Nivel Superior no garantiza que el alumno obtenga la máxima puntuación cuando no queda patente que el alumno haya entendido realmente lo que ha escrito. De modo similar, los profesores deberían tratar de convencer a los alumnos de que no utilicen matemáticas complejas provenientes de otra fuente que no entiendan bien. Un buen número de estos casos son las exploraciones basadas en temas de Física: siempre contenían una notable cantidad de matemáticas (cosas que se pueden encontrar directamente en cualquier libro de texto corriente) y, por ello, era muy difícil estar seguro de que el alumno hubiera entendido realmente las deducciones. En general,

solo los alumnos más brillantes es probable que tengan éxito cuando se marcan un objetivo que requiere el aprendizaje de todo un área nueva de matemáticas.

- Parece que los profesores no siempre comprueban con rigor los cálculos hechos. Pasan por alto errores (tanto los difíciles de detectar como otros obvios) que los alumnos han cometido o no toman nota de los mismos en el caso de que los hayan visto. Obviamente, para las labores de moderación resulta muy útil que los errores matemáticos aparezcan resaltados.
- Algunos colegios únicamente enviaron fotocopias del trabajo del alumno. Al hacer esto se pierde el color que el trabajo impreso original pudiera haber tenido y, por consiguiente, esto puede afectar negativamente a la nota de comunicación. Esto también tiende a dificultar la lectura del trabajo.

Prueba 1

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 17	18 - 35	36 - 48	49 - 57	58-67	68 - 76	77 - 90

Comentarios generales

En conjunto, los alumnos parecían estar bien preparados para esta prueba de examen, y tuvimos la impresión de que se habían dejado en blanco menos preguntas que en convocatorias anteriores. Parece que a la mayoría de los alumnos la prueba les resultó bastante asequible, y los alumnos más brillantes lograron notas muy altas sin mucha dificultad.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Integración utilizando el método de sustitución o el de comparación
- Conocer la relación que existe entre una función y su inversa
- Comprender el concepto de "juego justo"
- Conocer la relación que existe entre dos vectores paralelos
- Entender cuáles son los componentes de la ecuación vectorial de una recta, especialmente en el contexto del movimiento
- Interpretar la relación que existe entre una función, el gráfico de la derivada de esa función y la integral de la derivada

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Probabilidad simple y uso de diagramas de árbol
- Trabajar con funciones cuadráticas
- Interpretar una curva de frecuencias acumuladas
- Trabajo rutinario con vectores, en particular para hallar el vector que une dos puntos dados y el producto escalar
- Completar el cuadrado en una función cuadrática que tiene un coeficiente al principio

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1: Probabilidad y diagramas de árbol

Esta pregunta la respondieron muy bien; de hecho, casi todos los alumnos lograron la máxima puntuación. Hubo algún alumno aislado que perdió un punto en el apartado (c) por cometer errores aritméticos al multiplicar las fracciones. Hubo unos pocos alumnos que trataron de sumar las fracciones, en vez de irlas multiplicando a lo largo de las ramas.

Pregunta 2: Funciones trigonométricas

En general, los alumnos resolvieron muy bien esta pregunta. Sin embargo, hubo algunos alumnos que no parecían entender del todo la relación que existe entre el período de la función y el parámetro b de la ecuación de la función. Un error habitual fue escribir $b = \text{period}$.

Pregunta 3: Frecuencia acumulada y datos agrupados

Los alumnos obtuvieron muy buenos resultados en esta pregunta, y resultó agradable comprobar que la mayoría de ellos fueron capaces de establecer, fácilmente, la conexión entre el gráfico de frecuencias acumuladas y la tabla de los datos agrupados. Hubo unos pocos alumnos que trataron erróneamente de obtener la mediana hallando simplemente el valor central del eje $x-$, lo que les llevó a escribir soluciones tales como $\frac{0+6}{2}=3$. A pesar de que con este método incorrecto obtuvieron la respuesta correcta de 3, al haber utilizado claramente un método que no era válido, estos alumnos no lograron los dos puntos asignados al apartado (a) de la pregunta.

Pregunta 4: Derivada e integral de una función

En su mayor parte, los alumnos fueron capaces de lograr la máxima puntuación en el apartado (a) de esta pregunta utilizando bien la regla del producto o la regla del cociente. Sin embargo, hubo un número sorprendentemente alto de alumnos que sustituyeron incorrectamente los términos de la regla del cociente, a pesar de que la fórmula aparece en el cuadernillo de fórmulas. También hubo bastantes que cometieron errores algebraicos tras haber sustituido correctamente los términos; el más habitual fue $\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x(1)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$.

El apartado (b) de esta pregunta supuso todo un desafío a la mayoría de los alumnos. A pesar de que muchos alumnos trataron de utilizar un método de sustitución tomando $u=\ln x$, hubo muy pocos que lograron llegar hasta el final del desarrollo y hallaron la respuesta correcta. También hubo algunos alumnos que expresaron la respuesta utilizando la notación incorrecta, ya que escribieron $\frac{\ln x^2}{2}$ en vez de $\frac{(\ln x)^2}{2}$.

Pregunta 5: Patrones en las derivadas

La gran mayoría de los alumnos no tuvo ningún problema para hallar las primeras dos derivadas de e^{-2x}. Sin embargo, parece que muchos alumnos no entendieron bien la notación $f^{(3)}(x)$, que se incluye en la guía de Matemáticas NM, y dieron por hecho que significaba que tenían que elevar la función al cubo. Este error impidió que los alumnos reconocieran el patrón que define la primera, la segunda y la tercera derivada, con lo que no fueron capaces de hallar una expresión para $f^{(n)}(x)$. También hubo muchos alumnos que, a pesar de que no hallaron correctamente las tres derivadas, sí que se dieron cuenta de que existía este patrón, aunque no lograron la máxima puntuación en el apartado (b) porque en sus respuestas incluyeron -2^n en vez de la expresión correcta, esto es, $(-2)^n$.

Pregunta 6: Derivada de un polinomio y función inversa

Hubo muchos alumnos que hallaron con facilidad la derivada de la función polinómica y que la utilizaron para hallar el valor correcto de b utilizando el dato de $f'(0)=3$. Además, aquellos alumnos que se dieron cuenta de que $f^{-1}(7)=1$ significa que $f(1)=7$ no tuvieron ningún problema para hallar fácilmente el valor de a. No obstante, la mayoría de los alumnos trataron de hallar la inversa de la función intercambiando la x y la y y reordenando luego la ecuación, lo que les llevó a cometer un amplio abanico de errores algebraicos y les impidió a la mayoría hallar el valor correcto de a.

Pregunta 7: Concepto de juego justo

Esta pregunta constituyó todo un desafío para un elevado número de alumnos. Muchos alumnos, haciendo las cosas aparentemente de memoria, trataron de utilizar la expresión $E(X)=0$ porque les resultaba familiar, sin pararse a pensar lo que significa que un juego sea "justo" en el contexto de esta pregunta, en la que el enunciado dice que la jugadora (Rose) ya ha pagado 10 dólares para poder jugar al juego. Para aquellos alumnos que sí que interpretaron correctamente lo que significa que un juego sea justo, los cálculos que se requerían para hallar el valor de k eran bastante sencillos, aunque unos pocos pasaron apuros para calcular $\frac{10}{0.4}$ y llegar al resultado correcto, 25. También hubo algunos alumnos que hallaron la respuesta correcta teniendo en cuenta la cantidad de dinero que se había gastado inicialmente y la que se había ganado al cabo de, por ejemplo, diez o cien intentos. Este tipo de método intuitivo es válido, y los alumnos fueron capaces de obtener la máxima puntuación con este enfoque siempre y cuando hubieran plasmado claramente en el papel el razonamiento seguido y los cálculos realizados.

Pregunta 8: Función cuadrática

Un gran número de alumnos obtuvieron una puntuación muy buena en esta pregunta y muchos incluso lograron la máxima puntuación en los cuatro apartados. A los alumnos que se dieron cuenta de la relación que existía entre el gráfico de la función y las distintas formas de la ecuación la pregunta les resultó bastante sencilla. Por ejemplo, en el apartado (c), los alumnos que se dieron cuenta de que el vértice de la curva está situado sobre el eje de simetría fueron capaces de hallar con facilidad el valor máximo de la función sin dedicar tiempo a otros métodos o enfoques más laboriosos, como completar el cuadrado o utilizar la derivada para hallar el máximo. De modo similar, en el apartado (d), aquellos alumnos que comprendieron que h y k eran las coordenadas del vértice pudieron responder a la pregunta con facilidad, mientras que los alumnos que trataron de completar el cuadrado se vieron con frecuencia abocados al fracaso porque cometieron errores algebraicos.

Pregunta 9: Vectores

Casi todos los alumnos respondieron correctamente a los apartados (a) y (b), que eran preguntas rutinarias sobre vectores. Algunos alumnos empezaron a tener problemas al llegar al apartado (c), pues para responderlo era necesario que entendieran las propiedades que tienen los vectores paralelos. En el apartado (d) hubo muchos alumnos que fueron incapaces de hallar correctamente la velocidad de la partícula, ya que o bien hallaron el módulo del vector de posición ***c*** o porque no utilizaron el vector correcto (***a***), que se les había dado en un apartado anterior de la pregunta.

Pregunta 10: Análisis

Tal y como cabía esperar, de toda la prueba esta fue la pregunta que más dificultades les planteó a los alumnos, aunque el elevado número de alumnos que obtuvieron solo unos pocos puntos en esta pregunta resultó sorprendente. En los apartados (a) y (b), la mayoría de los alumnos no supieron cómo relacionar la información que se les daba en el gráfico de f' con las preguntas relativas al gráfico de f. En el apartado (b), hubo muchos alumnos que respondieron que el gráfico de f tenía un mínimo en $x = a$, quizá porque este punto era un mínimo local en el gráfico de la función derivada. Sin embargo, fue agradable comprobar que la mayoría de los alumnos que respondieron correctamente $x = d$ también fueron capaces de aportar una justificación completa de su respuesta. En el apartado (c), hubo muchos alumnos que no tuvieron en cuenta las dos zonas de las que constaba la región mencionada, o que no compensaron un valor con otro al estar el área desde $x = 0$ a $x = d$ por debajo del $x -$, lo que da lugar a una integral negativa. Además de todo eso, hubo muchos alumnos que no supieron cómo utilizar o que no se plantearon utilizar el teorema fundamental del cálculo, que aparece como $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$ en la guía del Nivel Medio.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Los profesores y los alumnos han de estar familiarizados con la *Guía de Matemáticas NM* vigente, especialmente en lo que respecta al contenido del programa de estudios y a la lista con la notación empleada. Habría que recordarles a los alumnos lo importante que es utilizar la notación matemática correcta en el desarrollo del ejercicio y a la hora de dar la respuesta final. Los alumnos también deberían practicar resolviendo preguntas en las que tengan que realizar cálculos aritméticos sin calculadora.

Es importante que los alumnos entiendan bien los conceptos que subyacen tras las matemáticas que aprenden en clase, en lugar de limitarse a saber qué fórmulas han de utilizar en cada caso. Con frecuencia vemos que los alumnos se sienten cómodos respondiendo a preguntas previsibles y basadas en el empleo de fórmulas conocidas, pero que luego se atascan en preguntas donde han de utilizar conceptos conocidos pero con enfoques poco convencionales o habituales. Un ejemplo sería la pregunta 6, donde muchos alumnos intercambiaron los valores de x y de y y se enredaron en manipulaciones algebraicas innecesarias tratando de hallar una expresión para la función inversa que no necesitaban, en vez de plantearse cuál es la relación que existe entre una función y su inversa. Otro ejemplo sería la pregunta 10, que se basaba en la aplicación y la interpretación de conceptos de análisis, más que en pedirles a los alumnos que utilizaran "reglas" para hallar la derivada y la integral de las funciones dadas.

Para terminar, los alumnos deberían mostrar siempre el desarrollo del ejercicio de una manera pulcra, bien presentada y ordenada, en lugar de escribir cálculos y razonamientos aleatorios aquí y allá por toda la página. Debería quedar perfectamente claro a qué pregunta y a qué apartado pertenece cada desarrollo, y los cálculos y los razonamientos deben incluirse en el lugar en el que se van a utilizar. Se les debería recordar a los alumnos que una respuesta correcta que no esté respaldada por el correspondiente desarrollo no va a recibir necesariamente la máxima puntuación.

Prueba 2

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 15	16 - 30	31 - 38	39 - 47	48 - 57	58 - 66	67 - 90

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Dibujos aproximados de curvas
- Hallar el discriminante de una función cuadrática (de segundo grado)
- Hallar el área que delimitan diversas curvas
- Distribución normal
- Distribución binomial
- Probabilidad condicionada
- Transformaciones de funciones
- Geometría de formas complejas

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Razones trigonométricas en un triángulo
- Aplicación de los teoremas del seno y del coseno
- Producto escalar, módulo y ángulo que forman dos vectores
- Regresión lineal
- Expansión binomial
- Ecuación de la recta tangente y de la normal (a una curva)

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1: Teorema del seno y del coseno y área de un triángulo

A la mayoría de los alumnos esta pregunta les resultó sencilla y asequible.

Casi todos se dieron cuenta de que era necesario aplicar el teorema del seno en el apartado (a) para resolver el problema. En alguna ocasión, las parejas ángulo-lado no eran correctas en el planteamiento del problema. Algunos utilizaron radianes en vez de grados, con lo que perdieron un punto.

El apartado (b) también lo resolvieron acertadamente la mayoría de los alumnos. Para hallar el área, en algunos casos utilizaron correctamente un enfoque basado en las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Unos pocos alumnos utilizaron el teorema del coseno o las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, que resultaron ser métodos menos eficaces que en muchos casos les hicieron perder un tiempo valioso.

Pregunta 2: Ángulos entre vectores

Muchos alumnos obtuvieron una buena puntuación en esta pregunta. Vimos que algunos alumnos no estaban familiarizados con la notación vectorial básica y sustituyeron erróneamente los ***i-j-k*** en las fórmulas. Hubo algún que otro alumno que supuso que el módulo podía tener un valor negativo.

Pregunta 3: Regresión lineal

Muchos alumnos tuvieron totalmente correcta esta pregunta, demostrando que estaban familiarizados con el manejo de la calculadora de pantalla gráfica para hallar la ecuación de la recta y el coeficiente. No fue infrecuente ver como respuestas a=5,05 y $b = -0.488$, lo que pone de manifiesto un uso incorrecto de las listas de la calculadora de pantalla gráfica para hallar los valores.

Algunos alumnos trataron de aplicar un enfoque algebraico para hallar la recta de regresión y unos pocos parecieron no darse cuenta de que *r* representa el coeficiente de correlación.

Pregunta 4: Desarrollo de la potencia de un binomio

Los alumnos que se dieron cuenta de que tenían que obtener el tercer término, por lo general, consiguieron resolver correctamente la pregunta, aunque hubo algunos que solo dieron un único valor para *k*. Unos pocos alumnos trataron de desarrollar en su totalidad el binomio por métodos algebraicos, lo que resultó ser una iniciativa infructuosa.

Pregunta 5: Representación gráfica y transformación de una función exponencial

A pesar de que esta pregunta requería simplemente el empleo directo de la calculadora de pantalla gráfica, la representación gráfica de esta función exponencial sobre la cuadrícula dada supuso un reto considerable para algunos alumnos. A pesar de que la mayoría de alumnos fueron capaces de elaborar un gráfico que tuviera la forma correcta, luego no tuvieron en cuenta cuál era el dominio y el rango de esta función.

Hubo muchos que no prestaron suficiente atención a la naturaleza asintótica de esta función. Hubo muy pocos que además dibujaran la asíntota, lo que en esta pregunta era una característica importante del gráfico.

A la hora de hallar una expresión para *g*, hubo muchos que invirtieron el sentido de una o de ambas transformaciones. La traslación vertical por lo general fue correcta, pero el desplazamiento horizontal lo realizaron de manera deficiente. El error más habitual fue obtener $g(x) = e^{x+4} + 1$.

Pregunta 6: Progresiones y series geométricas

A muchos esta pregunta les resultó asequible, aunque el enfoque más habitual fue ir calculando cada término "a lo bruto", lo que en ocasiones acarreó pequeños errores o imprecisiones que afectaron a la suma total. A pesar de que este método se consideró válido, constituye un uso poco eficaz del tiempo, lo que podría haber afectado al desempeño logrado en otras preguntas.

Aquellos que aplicaron la fórmula de la serie geométrica obtuvieron por lo general mejores resultados y fueron mucho más eficientes a la hora de responder a la pregunta.

Pregunta 7: Discriminante de una función cuadrática (de segundo grado)

Muchos alumnos sabían que tenían que igualar las expresiones y, a continuación, hubo algunos que supieron manipular la ecuación para que fuera igual a cero. Aquellos que obtuvieron el discriminante de esta ecuación lograron puntos adicionales, aunque solo unos pocos plantearon un discriminante correcto que fuera mayor que cero. Incluso en dichos casos, hallar las dos desigualdades fue algo que les costó a la mayoría.

Un método alternativo fue representar gráficamente cada función y hallar dónde se cortan la recta y la parábola (exactamente en uno y en dos lugares). Hubo pocos alumnos capaces de desarrollar este enfoque hasta el final y resolver correctamente la pregunta; con frecuencia ignoraron la segunda desigualdad para k.

Pregunta 8: Ecuación de la recta tangente y área entre curvas

Hubo muchos alumnos que utilizaron la calculadora de pantalla gráfica para hallar los valores correctos de p y de q.

A la hora de hallar el valor de la derivada en p muchos adoptaron innecesariamente un enfoque analítico, puesto que la calculadora de pantalla gráfica puede proporcionar rápidamente un valor numérico sin más que ir a la pantalla donde aparece el gráfico representado. Algunos alumnos hallaron la función derivada y eso es lo que dieron como respuesta final, sin darse cuenta de que tenían que dar un valor.

Se vio que muchos alumnos estaban familiarizados con la obtención de la ecuación de la normal. En algunos casos el alumno se equivocó y halló la ecuación de la recta tangente (en vez de la normal). No todos los alumnos supieron cómo hallar la pendiente de la recta normal, o hallaron la inversa (1/x) negativa (con signo cambiado) de un valor distinto del que habían hallado en el apartado (b).

En el apartado (d) no fue infrecuente que los alumnos hallaran el área comprendida entre f y g, lo que demuestra que no habían interpretado correctamente el enunciado.

Un número considerable de alumnos tomaron un camino analítico para resolver el problema y cometieron muchos errores, demostrando así que no sabían cómo utilizar de manera eficaz la calculadora de pantalla gráfica.

Pregunta 9: Distribución normal, distribución binomial y probabilidad condicionada

Resultó sorprendente comprobar que un número significativo de alumnos no entendieron que al tratarse de valores estandarizados podían responder a esta pregunta fácilmente utilizando la calculadora de pantalla gráfica. Algunos alumnos solo fueron capaces de hallar la probabilidad utilizando un valor concreto para la desviación típica, mientras que hubo otros que no incluyeron el desarrollo del ejercicio y se limitaron a escribir la respuesta final. De los pocos alumnos que trataron de recordar cuál es la probabilidad de que el valor esté a menos de 1 o 2 desviaciones típicas de la media, hubo algunos que se equivocaron o que fueron inexactos.

El apartado (b) era una pregunta de tipo "Mostrar que" y en ella muchos alumnos hicieron cálculos inversos utilizando $\sigma = 2$ para comprobar que, efectivamente, la probabilidad era igual a 0,975. Un gran número de alumnos trataron el 0,975 como si fuera una puntuación Z.

En cuanto al apartado (c), no hubo muchos alumnos que dibujaran un diagrama. Esto hizo que en ocasiones eligieran el lado incorrecto de la distribución, lo que les llevó a responder 51,3, que es un valor mayor que la media. Esto además afectó a su capacidad para responder correctamente al apartado (d) de la pregunta.

En el apartado (d), la mayoría de los alumnos no reconocieron el carácter condicional de la pregunta del subapartado (i) y con frecuencia hallaron P(t<50,1) y dieron ese valor como respuesta final. En el subapartado (d)(ii), hubo muchos que se dieron cuenta de la naturaleza binomial del problema, pero solo un pequeño porcentaje supo hallar la respuesta correcta, puesto que con frecuencia trataron de calcular $P\left(X=2\right)$ en vez de $P\left(X\geq 2\right)$.

Pregunta 10: Teorema del coseno y área de segmentos circulares

Aquellos que respondieron el apartado (a) por lo general fueron capaces de mostrar lo que se les pedía utilizando el teorema del coseno. En ocasiones puntuales el alumno utilizó un enfoque más complicado basado en la mitad del ángulo zeta (θ). En algunos casos los alumnos no mostraron todos los pasos necesarios y se dejaron puntos por el camino ya que no mostraron en su totalidad el resultado al que tenían que llegar.

Unos cuantos alumnos resolvieron correctamente el subapartado (b)(i) y plantearon una ecuación correcta en (b)(ii), pero luego no fueron capaces de resolver acertadamente la ecuación, normalmente porque recurrieron a un método analítico allí donde bastaba con usar la calculadora de pantalla gráfica. Para muchos alumnos fue un obstáculo importante darse cuenta de que había que reducir la ecuación a una variable antes de intentar resolverla. En algunos casos aislados, el alumno escribió una respuesta que estaba fuera del dominio dado.

Entre los alumnos que respondieron el apartado (c), muchos no se dieron cuenta de que para calcular el área de la pregunta (*R*) había que restar el área de un segmento circular, por lo que con frecuencia plantearon la desigualdad "el área del cuadrado ha de que ser mayor que el doble del área del sector circular". Muchos alumnos cometieron errores al tratar de eliminar los paréntesis o, sencillamente, no los utilizaron. Entre los que plantearon una desigualdad correcta, muy pocos llegaron a una conclusión que fuera totalmente correcta.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Hay un número significativo de alumnos a los que todavía les cuesta decidir si en una pregunta es necesario o no utilizar la calculadora de pantalla gráfica y en qué casos resulta pertinente utilizarla. Hay preguntas en las que es posible utilizar la calculadora de pantalla gráfica o tomar un camino algebraico. Esta última opción suele ser más larga y puede llevar a los alumnos a cometer errores varios. Es importante dedicar tiempo en clase a discutir con los alumnos cómo han de plasmar el desarrollo del ejercicio, y hay que recordarles que el uso de la notación de calculadora —por ejemplo, binompdf o invnormal— no se considera una manera de proceder correcta.

Los profesores también deben hacer hincapié en la importancia de comprobar en qué modo está la calculadora que van a utilizar, para que cuando trabajen con ángulos o con funciones trigonométricas sepan si están usando radianes o grados. Los alumnos también han de ser conscientes de que quizás tengan que pasar de un modo a otro durante el examen, si la pregunta así lo requiere.

Asimismo, también es importante recordar a los alumnos la importancia de arrastrar más de tres cifras significativas durante el desarrollo de los ejercicios, dado que esto puede llevarles a dar respuestas inexactas.

Es necesario poner más énfasis en las preguntas de tipo "Mostrar que" para evitar procedimientos en los que se trabaje a la inversa (hacia atrás) y para asegurarse de que los alumnos muestren todos los pasos pertinentes, sean cuales sean, en el desarrollo del ejercicio.

Aunque el dibujo aproximado de gráficos a partir de lo que muestra la pantalla de la calculadora de pantalla gráfica pueda parecer una tarea sencilla, lo cierto es que los alumnos tienen que detenerse unos instantes para entender bien, desde un punto de vista matemático, la función que tienen entre manos. Por ejemplo, si la función tiene un comportamiento asintótico, el dibujo aproximado debería reflejar su comprensión de esta característica. Si hay un dominio concreto, se pueden marcar en el gráfico los extremos de dicho dominio. A pesar de que el objetivo del dibujo aproximado no es la precisión absoluta, sí que se espera que el alumno preste una cierta atención a la precisión, para lo cual se pueden ayudar fácilmente de la calculadora de pantalla gráfica.

Hay unos cuantos alumnos a los que les vendría bien tener una comprensión más sólida de la distribución normal. Con demasiada frecuencia parecía que los alumnos echaban mano de la calculadora de pantalla gráfica para hallar respuestas sin antes detenerse a reflexionar sobre la naturaleza de la pregunta que tenían entre manos. Antes de ponerse a hacer cálculos, el simple acto de dibujar un dibujo aproximado quizá les ayudaría a interpretar el enunciado.

Hay muchos alumnos a los que les sigue costando reconocer cuáles son los problemas de probabilidad condicionada. Resultaría beneficioso realizar un análisis detallado de este tipo de ejercicios.

La resolución de ecuaciones también constituye todo un reto para los alumnos. El trabajo que hay que realizar con ellos debería centrarse en aprender a decidir si es adecuado utilizar la calculadora de pantalla gráfica o si el ejercicio se puede resolver de manera algebraica.

En los formularios G2 de todos los componentes hubo diversos comentarios sobre terminología y notación, pero estos comentarios concordaban con lo que dice la guía. A veces parece que los profesores desconocen la existencia de la lista con la notación empleada y que no son conscientes de que existen distintos términos para describir la misma cosa (especialmente en francés y en español), pero que la política del IB es ceñirse a lo que dice la guía.

Los profesores deberían darse cuenta de que la prueba de examen se ha diseñado de modo tal que las preguntas más difíciles sean, por lo general, la 6 y la 7 de la sección A y la 9 y la 10 de la sección B. Estas preguntas suelen evaluar la comprensión conceptual, así como el grado de competencia con los procedimientos.